Modelovanje lažnih investicionih fondova primenom Petrijevih mreža

UDK: 336.1.07 ; 658:004.42.045 ; 519.179.2

Daniel Ciuiu[1, 2]
[1] *Mašinski fakultet, Bukurešt, Rumunija*
[2] *Rumunski institut za ekonomske prognoze, Bukurešt, Rumunija*
e-mail: dciuiu@yahoo.com

XII Internacionalni Simpozijum SymOrg 2010, 09.-12. Jun 2010, Zlatibor, Srbija

U ovom radu izrađujemo model lažnih investicionih fondova primenom Petrijevih mreža pozicija (mesta) i tranzicija.Takođe ćemo izvršiti klasifikaciju firmi primenom regresije da bismo proverili da li postoje mogući lažni investicioni fondovi. U ovoj regresiji analitički ćemo izračunati markere (stanja, nišane, prim.prev.) pozicija na kojima se stiču neki drugi elementi Petrijeve mreže, a onda ćemo izraziti ovu vrednost u funkciji ovih istih elemenata primenom regresije. Na osnovu istovetnosti koeficijenata naći ćemo odnos između dve težine (pondera) strelica. Takođe razvijamo program gde su pozicije i tranzicije upotrebljene kao klase za Petrijeve mreže i iskoristićemo mehanizam nasleđa da proširimo Petrijeve mreže na Petrijeve mreže prioriteta.

1. Uvod

Definicija 1 ([6]). *Naziva se tročlana Petrijeva mreža* $N = (S, T, F)$, *gde:*
1) S *i* T *predstavljaju rastavljene skupove.*
$F \subset S \times T \cup T \times S$ *predstavlja binarni odnos.*

Definicija 2 ([6]). *Uzmimo da* $N = (S, T, F)$ *predstavlja Petrijevu mrežu.*
1) N *je neprazno ako je* $S \cup T \neq \Phi$.
2) N *je konačno ako je* $X = S \cup T$ *konačno.*
3) N *je čisto ako za svako* $x \in X = S \cup T$ *dobijamo* ${}^{\bullet}x \cap x^{\bullet} = \Phi$, *gde je* ${}^{\bullet}x = \{y \in X | (y,x) \in F\}$ *a* $x^{\bullet} = \{y \in X | (x,y) \in F\}$.
4) N *je prosto ako za svako* $x, y \in X$ *tako da* ${}^{\bullet}x = {}^{\bullet}y$ *and* $x^{\bullet} = y^{\bullet}$ *i dobijamo* $x = y$.
Element $x \in X$ *je izolovan za* ${}^{\bullet}x \cup x^{\bullet} = \Phi$.

Definicija3 ([6]). *Zove se petočlana Petrijeva mreža pozicija i tranzicija* (S,T,F,K,W), *gde:*
1) (S,T,F) *predstavlja Petrijevu mrežu.*
2) $K : S \to N^{*} \cup \{\infty\}$ *predstavlja funkciju kapaciteta Petrijeve mreže.*
3) $W : F \to N^{*}$ *predstavlja funkciju pondera Petrijeve mreže.*
U ovom slučaju S *se naziva skup pozicija, a* T *predstavlja skup tranzicija.*
Ako su funkcije K *i* W *konstantno* 1, *predstavlja skup uslova,* T *predstavlja skup događaja, a dobijena Petrijeva mreža postaje Petrijeva mreža uslova i događaja.*

Uzmimo da je $\Sigma = (S, T, F, K, W)$ Petrijeva mreža pozicija i tranzicija, a $t \in T$ jedan od prelaza na njoj. Putem t^{-}, t^{+}, i Δt određujemo funkcije $t^{-}, t^{+} : F \to N^{*}$ i $\Delta t : F \to Z^{*}$ tako da $t^{-}(s) = W(s,t)$, $t^{+}(s) = W(t,s)$ a $\Delta t = t^{+}(s) - t^{-}(s)$.

Definicija 4 ([6]). *Uzmimo da je* $\Sigma = (S, T, F, K, W)$ *Petrijeva mreža pozicija i tranzicija. Na mreži je marker funkcija* $M : S \to N^{*}$ *tako da za svako* $s \in S$ *dobijamo* $M(s) \leq K(s)$.

Grafički prikazano, pozicije na Petrijevoj mreži pozicija i tranzicija predstavljene su krugovima, tranzicije su predstavljene pravougaonicima, a spojnice (elementi F) strelicama. Kapaciteti koji se razlikuju od pišu se između zagrada posle odrednica pozicija, a ponderi čija je vrednost različita od ∞ beleže se na odgovarajućim strelicama. Markeri su predstavljeni tačkama na pozicijama na kojima imaju pozitivnu vrednost. Ako je marker veliki, predstavljamo samo tačku i njenu vrednost.

Definicija 5 ([6]). *Uzmimo da je* (S,T,F,K,W) *Petrijeva mreža pozicija i tranzicija.*
1) Tranzicija $t \in T$ okida na markeru M (ili ima odobrenje na markeru M) ako za svako $s \in {}^{\bullet}t$ dobijamo $M(s) \geq W(s,t)$ (resursi precedenata su dovoljno veliki), a za svako $s \in {}^{\bullet}t$ dobijemo $M(s) + W(t,s) \leq K(s)$ (ako dodamo resurse koje je proizveo njegovim sledbenicima u sekvenci, ne prevazilazimo kapacitet).
2) Marker M' nastake okidanjem tranzicije t na markeru M ako za svako $s \in {}^{\bullet}t$ dobijamo $M'(s) = M(s) - W(s,t)$ a za svako $s \in {}^{\bullet}t$ dobijemo $M'(s) = M(s) + W(t,s)$, a za druge $s \in S$ dobijamo $M'(s) = M(s)$.

Prvi deo gorenavedene definicije predstavlja pravilo osposobljavanja, dok drugi deo predstavlja pravilo okidanja. Pomoću $M[t\rangle_{\Sigma}$ određujemo činjenicu da tranzicija ima potencijal da okine na markeru M a po-

moću $M[t\rangle_\Sigma M'$ pokazujemo da marker M' nastaje okidanjem tranzicije t na markeru M. Takođe, određujemo $T(\Sigma, M) = \{\in T | M[t\rangle_\Sigma\}$; ako oko Petrijeve mreže nema konfuzije, Σ se može izostaviti.

Definicija 6([6]). *Uzmimo da je Σ Petrijeva mreža pozicija i tranzicija, a M marker na njoj.*

1) $w \in T$ predstavlja niz tranzicija M ako postoje markeri $M_0 = M, M_1, ..., M_n$ tako da $w = t_0 t_1 ... t_{n-1}$ a $M_i [t_i\rangle_\Sigma M_{i+1}$ Ovo beležimo kao $M[w\rangle_\Sigma$.

2) Markeru M' može se pristupiti iz M ako postoji niz tranzicija w kao gore, tako da $M' = M_n$. Ovo određujemo kao $M[w\rangle_\Sigma M'$.

U gornjoj definiciji takođe prihvatamo praznu sekvencu λ: dobijamo $M[\lambda\rangle_\Sigma$ i $M[\lambda\rangle_\Sigma M$.

Definicija 7([6]). *Naziva se markirana Petrijeva mreža pozicija i tranzicija ili Petrijev sistem pozicija i tranzicija par* $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *gde Σ predstavlja Petrijevu mrežu pozicija i tranzicija a* M_0 *početni marker Σ.*

Definicija 8([6]). *Markirana Petrijeva mreža pozicija i tranzicija nema kontakt ako* $(\forall M \in [M_0])(\forall t \in T)$ $(\forall s \in S)(M(s) \geq W(s,t) \Rightarrow M(s) + W(t,s) \leq K(s))$.

Stoga, ako ako tranzicija nije osposobljena da okine na datom markeru, ovo se događa samo usled nedostatka resursa, a ne zato štp je kapacitet prevaziđen.

Ako tranzicije nastaju u nizu, imamo sekvencijalnu evoluciju Petrijeve mreže pozicija i tranzicija. Ako neke tranzicije nastaju istovremeno, evolucija tranzicije je paralelna..

Definicija 9([6]). *Uzmimo da je Σ Petrijeva mreža pozicija i tranzicija bez kontakta,* M *je njen marker, a* $A \subseteq T$.

1) A predstavlja skup tranzicija paralelno osposobljenih da okinu na markeru M (u Σ) za $\sum_{t \in A} t^- \leq M$.

2) Marker M' nastaje paralelnim okidanjem skupa tranzicija A na markeru M (u Σ) za $M' = M + \sum_{t \in A} \Delta t$

Primedba 1. Gore navedena definicija važi samo za Petrijeve mreže pozicija i tranzicija bez kontakta, ali se ova definicija može proširiti uslovom $M + \sum_{t \in A} t^+ \leq K$ (uslov ne prevazilazi kapacitete).

Definicija 10([6]). *Uzmimo da je* $\Sigma = (S, T, F, K, W)$ *Petrijeva mreža pozicija i tranzicija sa* $S = \{s_1, ..., s_m\}$ *i* $T = \{t_1, ..., t_n\}$ *Matrica događaja Σ predstavlja* $m \times n$ *matricu* I_Σ *tako dat* $I_\Sigma(i,j) = \Delta t_j(s_i)$ *za svako* $i = \overline{1,m}$ *i* $j = \overline{1,n}$.

Teorema 1([6]). *Uzmimo da je Σ Petrijeva mreža pozicija i tranzicija i njene dve markere,* M_1 *i* M_2 *predstavljene kao m – vektori. Markeru* M_2 *može se pristupiti sa* M_1 *ako i samo ako postoji n – vektor* f *tako da* $M_2 = M_1 + I_\Sigma \cdot f$.

Na osnovu dokaza gorenavedene teoreme (videti [6]) da je f_i broj pojavljivanja t_i u w tako da $M_1[w\rangle_\Sigma M_2$.

Definicija 11([6]). *Uzmimo da je* $\Sigma = (S, T, F, K, W)$ *Petrijeva mreža pozicija i tranzicija sa matricom događaja* I_Σ.

1) Vektor sa m komponentama vrednosti celog broja J predstavlja S – stalnu vrednost za $J^T \cdot I_\Sigma = 0$.

2) Podrška S – stalnoj vrednosti J *jeste skup* $P_J = \{s_i \in S | J_i \neq 0\}$.

3) S – nepromenljiva J *je nenegativna za* $J \geq 0$.

4) S – nepromenljiva $J > 0$ *je minimalna ako ne postoji* S *– stalna vrednost* J' *tako da* $0 < J' < J$.

5) Petrijeva mreža pozicija i tranzicija generisana pomoću S *– stalne vrednosti* J *predstavlja Petrijevu mrežu* $\Sigma' = (S', T', F', K', W')$ *gde*

a) $S' = P_J$.

b) $T' = {}^\bullet S' \cup S'^\bullet$.

c) $F' = F \cap ((S' \times T') \cup (T' \times S'))$.

d) $K' = K|_{S'}$.

e) $W' = W|_{F'}$.

Na osnovu postojanja pozitivnih S – stalnih vrednosti možemo da zaključimo da možemo da damo pondere pozicijama pomoću vektora g tako da za svaki marker *M* i *M'* dostupan sa *M* dobijamo $g^T \cdot M = g^T \cdot M'$ (videti [6]). Stoga za svaki početni marker M_0 (koja predstavlja početne resurse u modelu sistema) ponderisani resursi dela sistema predstavljani P_j ostaju konstantni. Ako je S – stalna vrednost minimalna, ponderi su minimalni za pozicije koje su obuhvaćene.

Skup S – stalnih vrednosti predstavlja Z – modul, t.j., ima svojstva vektorske pozicije, ali umesto polja dobijamo samo prsten (krug), naime Z.

Definicija 12([6]). *Uzmimo da je* $\Sigma = (S, T, F, K, W)$ *Petrijeva mreža pozicija i tranzicija sa matricom događaja* I_Σ.

1) Vektor sa komponentama vrednosti celog broja J *predstavlja* T *– nepromenljivu za* $I_\Sigma \cdot J = 0$.

2) Podršku T *– nepromenljivoj* J *predstavlja* $P_J = \{t_i \in T | J_i \neq 0\}$.

3) T *– nepromenljiva* J *je ne-negativna za* $J \geq 0$.

4) T *– nepromenljiva* $J > 0$ *ima minimalnu vrednost ako ne postoji* T *– nepromenljiva* J' *tako da* $0 < J' < J$.

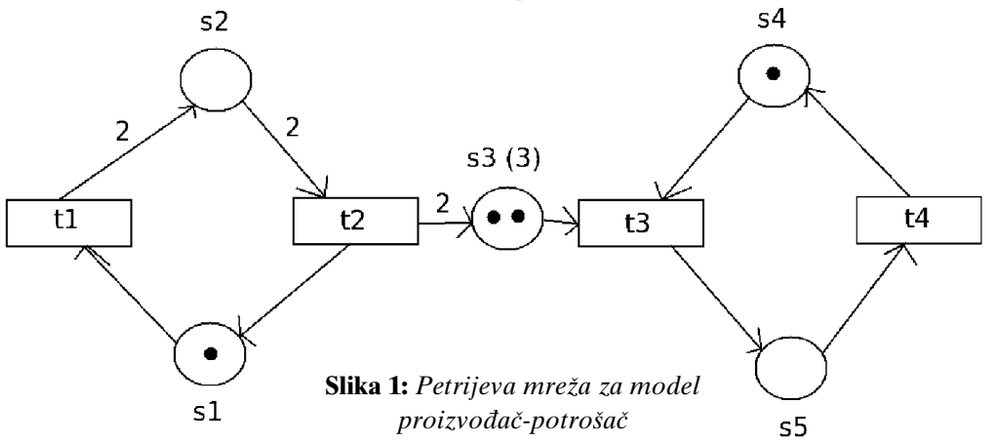
5) Petrijeva mreža pozicija i tranzicija generisana T *– nepromenljivom* J *predstavlja Petrijevu mrežu* $\Sigma' = (S', T', F', K', W')$ *gde*

a) $T' = P_J$.
b) $S' = {}^{\bullet}T' \cup T'^{\bullet}$.
c) $F' = F \cap ((S \times T') \cup (T' \times S'))$.
d) $K' = K|_{S'}$.
e) $W' = W|_{F'}$.

Pretpostavimo da postoji T – nepromenljiva *J* I da za dati marker *M* postoji niz tranzicija of *M* koje sadrži tranzicije P_J sa odgovarajućim multiciplitetima *J*, I samo ovim tranzicijama. U ovom slučaju marker *M* može se reprodukovati posle konačnog broja tranzicija (primenjujemo teoremu 1). Minimalna vrednost nepromenljive znači da se marker reprodukuje posle minimalnog broja pojavljivanja obuhvaćenih tranzicija. Ako ne postoji niz tranzicija od *M* kao gore za minimalnu nepromenljivu. *M* se ne može reprodukovati posle konačnog broja tranzicija.

Skup T – nepromenljivih takođe predstavlja Z – modul.

Primer 1([6]). *Pogledajmo sledeći model proizvođač-potrošač*:



Slika 1: *Petrijeva mreža za model proizvođač-potrošač*

U gore prikazanoj Petrijevoj mreži elemente tumačimo na sledeći način:

- s_1 *predstavlja signal da je proizvođač spreman da proizvodi.*
- s_2 *predstavlja signal da je proizvođač spreman da pošalje proizvode.*
- s_3 *predstavlja odbojnik (kapacitet je).*
- s_4 *predstavlja signal da je potrošač spreman da prihvati proizvode.*
- s_5 *predstavlja signal da je potrošač spreman da kupi proizvode.*
- t_1 *predstavlja proizvodnu aktivnost.*
- t_2 *predstavlja aktivnost slanja ka odbojniku.*
- t_3 predstavlja aktivnost prijema na odbojniku.
- t_4 predstavlja aktivnost korišćenja proizvoda.

Tranzicije t_1 *i* t_3 *su paralelno osposobljene da okidaju na inicijalnom markeru* $M_0 = (1,0,2,1,0)^T$. *Zapažamo da posle okidanja* t_1 t_2 *je osposobljeno da okine samo ako smanjimo marker* s_3 *(odbojnik) okidanjem* t_3 *(prijem sa odbojnika). Stoga proizvođač ne može da proizvede onoliki broj primeraka koliko želi dok potrošač svojom potrošnjom ne isprazni odbojnik. Posle okidanja* t_3 *ova tranzicija više nije sposobna da okida: prvo mora da okine* t_4*: efektivna potrošnja.*

Matrica događaja je $I_\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

S – *nepromenljive su* $J = (2 \cdot x_2, x_2, 0, x_4, x_4)^T$ *sa minimalnim* S – *nepromenljivim* $(2,1,0,0,0)^T$ *i* $(0,0,0,1,1)^T$. *Zapažamo da možemo da uzmemo* $g = (2,1,0,1,1)^T$, *koje se može smatrati ravnotežom između ponude I potražnje.*
T – *nepromenljive su* $J = (x_1, x_1, x_1, x_1)^T$ *sa minimalnim* T – *nepromenljivim* $(1,1,2,2)^T$. *Tako da ako okinemo dva puta niz* t_3 , t_4 *ispraznićemo odbojnik, a kada okinemo* t_1 *i* t_2 *reprodukujemo početni marker.*

Sada ćemo predstaviti prošireni oblik Petrijevih mreža..

Definicija 13([6]). *Petrijeva mreža sa prioritetima je par* $\gamma = (\Sigma, \rho)$ *gde* Σ *predstavlja Petrijevu mrežu, a* ρ *predstavlja delimični red odnosa skupa* T. *Značaj reda odnosa* ρ *jeste da za* $t_1 \rho t_2$ *tranzicija* t_2 *ima veći prioritet okidanja u odnosu na* t_1.

Tranzicija t *je* p – *osposobljena da okida na markeru* M *(u* $\perp$ *) za* $M[t\rangle_\Sigma$ *I za svako* t' *tako da* $M[t'\rangle_\Sigma$ *nemamo* $t\rho t'$. *Ovo izražavamo kao* $M[t\rangle_{\gamma,p}$.

Marker M' *je* p – *nastao okidanjem tranzicije* t *na markeru* M *za* $M[t\rangle_{\gamma,p}$ *i* $M[t\rangle_\Sigma M'$. *Ovo izražavamo kao* $M[t\rangle_{\gamma,p} M'$.

Definicija 14([6]). *Petrijeva mreža kontrolisana redovima je par* $\gamma = (\Sigma, Q)$ *gde* Σ *predstavlja Petrijevu mrežu, a* Q *predstavlja skup redova sa tranzicijama koje se javljaju samo jednom u redu.*

Uzmimo da je $\gamma = (\Sigma, Q)$ *Petrijeva mreža kontrolisana redovima,* M *je marker* Σ *ad* $q \in Q$ *predstavlja red sa gore navedenim karakteristikama.*

Tranzicija t *je* Q *– osposobljena da okida* (M,q), *i mi to beležimo kao* $M[t\rangle_{\Sigma,Q}$, *za* $M[t\rangle_{\Sigma}$ *a* t *predstavlja prvu tranziciju osposobljenu da okine u* q.

Ako je M' *marker* Σ *a* $q' \in Q$ *predstavlja red sa gore opisanim osobinama, kažemo da* (M', q') *predstavlja* Q_i *– nastalu okidanjem tranzicije* t *na* (M,q), *i to izražavamo kao* $(M,q)[t\rangle_{\Sigma,Q_i}(M',q')$, *za* , $(M,q)[t\rangle_{\Sigma,Q_i}$ (M',q') $M[t\rangle_{\Sigma} M'$ *i* q' *dobijene* q *kako sledi:*

(a) *Izdavajamo* t *iz* q

(b) *Dodajemo na kraj* q *sve tranzicije osposobljene da okidaju na markeru* M' *koje već nisu u redu (arbitrarnim redom)*

(c) *Sa tranzicijama iz dobijenog reda iz* (a) *i* (b) *koje nisu osposobljene da okidaju na markeru* M' *uradićemo sledeće korake u zavisnosti od* $i = \overline{1,3}$ *:*

(c_1) *ostaje u redu do mogućeg uklanjanja (kada to postane moguće u koraku* (a)*)*

(c_2) *uklonjene su iz reda*

(c_3) *uklonjene su iz reda od početka do prve tranzicije osposobljene da okine na markeru* M'.

Definicija 15([6]). *Uzmimo da* Σ *predstavlja Petrijevu mrežu,* M *predstavlja njen marker, a* $A \subseteq T$. A *predstavlja maksimalni skup tranzicija u paralelnom nizu osposobljenih da okinu u* M *(u* Σ*) ako je to skup tranzicija osposobljenih da okinu u* M *i za bilo koju* $t \in T - A$ *skup* $A \cup \{t\}$ *više nema ovu osobinu.*

Definicija 16([6]). *Uzmimo da* Σ *predstavlja Petrijevu mrežu,* M *je njen marker,* $A \subseteq T$ *i* $t \in T$.

1) t *je max-osposobljena da okine na* (M,A) *u* Σ, *i ovo izražavamo kao* $(M,A)[t\rangle_{\Sigma,\max}$, *if:*

a) $M[t\rangle_{\Sigma}$.

b) $t \in A$.

2) (M',B) *je max-proizvedena okidanjem tranzicije* t *u* (M',A) *u* Σ, *a ovo izražavamo kao* $(M,A)[t\rangle_{\Sigma,\max}$ (M',B), *if:*

a) $(M,A)[t\rangle_{\Sigma,\max}$.

b) $M[t\rangle_{\Sigma} M'$.

c) $B = \begin{cases} A - \{t\} \text{ if } A - \{t\} \neq \Phi \\ C \text{ if } A - \{t\} = \Phi \end{cases}$,

gde C predstavlja bilo koji arbitrarni skup tranzicija paralelno osposobljenih da okinu u M'.

Definicija 17([6]). *Nedetrministički konačni automatizam je petočlani* $A = (Q, Inp, Out, \delta, q_0)$, *gde* Q, *Inp i Out predstavljaju neprazne konačne skupove koji predstavljaju skup stanja, skup ulaza i na kraju skup izlaza,* $\delta : Q \times Inp \to P(Out \times Q)$ *predstavlja funkciju tranzicije, a* $q_0 \in Q$ *predstavlja početno stanje.*

Definicija 18([6]). *Petrijeva mreža kontrolisana konačnim automatizmom, skraćeno* APTN, *predstavlja par* $\gamma = (\Sigma, A)$ *gde* Σ *predstavlja Petrijevu mrežu pozicija i tranzicija a* $A = (Q, Inp, Out, \delta, q_0)$ *predstavlja nedeterministički konačni automatizam tako da:*

1) $Inp = \mathbb{P}(T)$, $Out = T$ *;*

2) Za svako $q \in Q$ i $U \in \mathbb{P}(T) - \{\Phi\}$ dobijamo $\delta(q, U) \neq \Phi$ (oslobađanje pomoću A);

3) Za svako $q \in Q$, $U \in \mathbb{P}(T) - \{\Phi\}$ i $(t, q') \in \delta(q, U)$ dobijamo $t \in U$ (doslednost u odlučivanju).

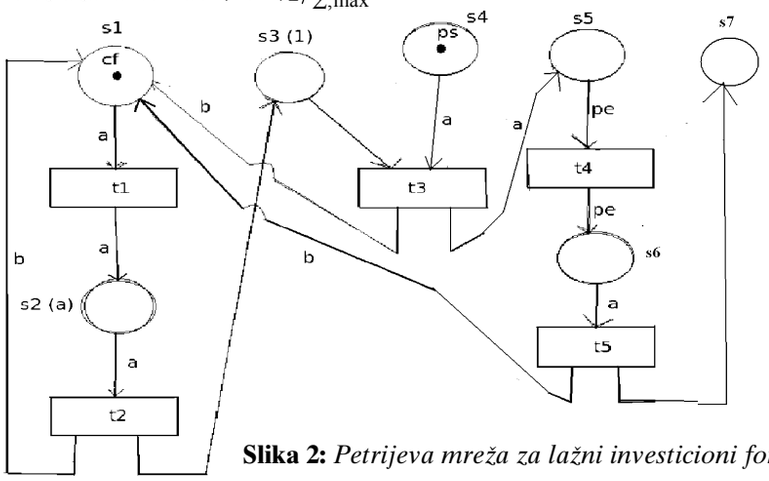
Definicija 19([6]). *Uzmimo da* $\gamma = (\Sigma, A)$ *predstavlja* APTN, q *predstavlja stanje A, M je marker* t *je tranzicija* Σ.

1) t je a – osposobljeno da okine u (M,q) (u γ), i ovo označavamo kao $(M,q)[t\rangle_{\gamma,a}$, ako postoji stanje q' za A tako da $(t, q') \in \delta(q, T(M))$.

1) (M', q') je a – proizvedeno okidanjem tranzicije t (M,q) (u γ), i ovo izražavamo kao $(M,q)[t\rangle_{\gamma,a}(M',q')$, za $(t, q') \in \delta(q, T(M))$ i $M' = M + \Delta t$.

2. Model

Posmatrajmo sledeći sistem Petrijeve mreže pozicija i tranzicija:



Slika 2: *Petrijeva mreža za lažni investicioni fond*

U gore prikazanoj Petrijevoj mreži elemente tumačimo na sledeći način:.

- s_1 predstavlja fiktivni kapitall.
- s_2 predstavlja sumu koja će se investirati kao fiktivna investicija (kapacitet je a).
- s_3 predstavlja signal mogućih investitora (kapacitet je 1).
- s_4 predstavlja očekivanu korist za organizatora.
- s_5 predstavlja prvi depozit organizatora (mesto gde se deponuje novac investitora).
- s_6 mesto sa kog organizator simulira da igra još nije završena.
- s_7 is the final account of the organizer.
- t_1 predstavlja operaciju izdvajanja iz fiktivnog kapitala.
- t_2 predstavlja fiktivnu investiciju.
- t_3 predstavlja efektivnu investiciju.
- t_4 predstavlja imitaciju konačne koristi.
- t_5 predstavlja kolaps fonda.

Primedba 2. U gore navedenom modelu imamo $b > a$ (u stvari $b >> a$), $a \mid pe$ a $pe \le ps < pe + a$. ps predstavlja ciljanu korist organizatora, predstavlja stvarnu korist za organizatora, predstavlja prosečnu stopu upisanog novca populacije, a $\frac{b}{a} - 1$ predstavlja lažnu stopu koristi iz igre.

Gore navedenoj Petrijevoj mreži možemo da dodamo pozicije s_8 i s_9, i tranzicije t_6 i t_7 analogne pozicijama s_6 i s_7, i tranzicije t_4 i t_5: niz s_7, t_6, s_8, t_7, s_9 je identičan nizu s_5, t_4, s_6, t_5, s_7 . Analogno tome, Petrijevoj mreži možemo da dodamo bilo koji broj ovakvih nizovakoji se sastoje od dve pozicije i dve tranzicije..

Gore prikazana Petrijeva mreža pozicija i tranzicija je neprazna, konačna, čista i jednostavna, i ne sadrži izolovane elemente. Početni marker je

$$M_0 = (cf, 0, 0, ps, 0, 0, 0)^T. \tag{1}$$

Matrica događaja je

$$I_\Sigma = \begin{pmatrix} -a & b & b & 0 & b \\ a & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -pe & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pe & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

S – nepromenljive dobijene rešenjem linearnog sistema $I_\Sigma^T \cdot J = 0$ (transponovani odnos iz definicije 11) imaju oblik

$$J = \left(J_1, J_1, (a-b)J_1, \left(2\frac{b}{a} - 1\right)J_1 + J_5, J_5, J_5, J_5 \right)^T. \tag{3}$$

Zapažamo da je S ž– nepromenljiva J ne-negativna samo za $J_1 = 0$, pri čemu se u ovom slučaju dobija minimalna S – nepromenljiva $J = (0,0,0,1,1,1,1)^T$. Interesantno je da Petrijeva mreža generisana pomoću ove minimalne S – nepromenljive predstavlja lanac pozicija i tranzicija $s_4 \to t_3 \to s_5 \to t_4 \to s_6 \to t_5 \to s_7$: investicioni fond stvara se uzimanjem novca od investitora (pozicija s_4) i deponovanja na poziciju s_5, a zatim pomeranja na poziciju s_6 i konačno na poziciju s_7.

Jedino T – nepromenljiva ima sve komponente jednake 0 ($P_J = \Phi$ za svaku T – nepromenljivu J). To znači da ni jedan marker (uključujući i početni) ne može da se reprodukuje posle konačnog broja koraka.

Prvobitno jedina tranzicija osposobljena da okine jeste t_1 i ona proizvodi marker $M_1 = (cf - a, a, 0, ps, 0, 0, 0)^T$. Zatim je jedina tranzicija osposobljena da okine t_2 i ona proizvodi marker $M_2 = (cf - a + b0, 1, ps, 0, 0, 0)^T$. Sada postoje dve tranzicije osposobljene da okinu, i one su paralelno osposobljene da okinu: t_1 i t_3. Čak je i evolucija Petrijeve mreže sekvencijalna pošto prvo koristi tranziciju t_1 ili tranziciju t_3, iako je paralelni marker $M_3 = (cf - 2 \cdot a + b, a, 0, ps - a, a, 0, 0)^T$. Gore navedeni niz ($t_2$ a onda i podniz t_1 i t_3) primenjuje se dok ne dobijemo $M_4 = \left(cf - pe - a + 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot pe, a, 0, ps - pe, pe, 0, 0\right)^T$. U ovom momentu postoje dve tranzicije paralelno osposobljene da okinu: t_2 i t_4. Ako u poslednjem koraku ne primenimo t_1 dobijeni marker je $M_5 = \left(cf - pe + \right.$ $\left. + 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot pe, 0, 0, ps - pe, pe, 0, 0\right)^T$, a t_2 se zamenjuje sa t_1 između gore navedenih tranzicija paralelno osposobljenih da okinu. Ovaj paralelizam opstaje dok ne primenimo tranziciju t_2 a onda tranziciju t_1, ili primenimo tranziciju t_4 pa ponovimo tranziciju t_5 dok marker s_6 ne bude 0. Kada primenimo t_2 tranzicija t_3 nije osposobljena da okine zato što imamo $ps - pe < a$. Pošto primenimo t_1 jedina tranzicija osposobljena da okine ostaje t_4 ili t_5 (ako je t_4 već primenjena). Onda primenjujemo t_5 dok marker s_6 ne bude 0. Ako marker s_6 iznosi 0 jedina tranzicija osposobljena da okine je t_2, a sledeća je t_1 . U svim gorenavedenim slučajevima dobijamo konačni marker $M_6 = \left(cf - 2 \cdot a + b + \frac{3 \cdot b - a}{a} \cdot pe, \right.$ $\left. a, 1, ps - pe, 0, 0, pe\right)$ i ni jedna od gore datih tranzicija sada nije osposobljena da okine: igra je propala.

Pošto su u svako vreme sve tranzicije paralelno osposobljene da okinu, možemo da posmatramo model Petrijeve mreže kao maksimalnu strategiju: kada je početi marker $A = \{t_1\}$. Iz ovog razloga takođe možemo da posmatramo model Petrijeve mreže kontrolisane putem konačnog automatizma: uzimamo

$$Q = \{q_0, q_1\}, \tag{4}$$

$$\delta(q_0, U) = \{(t, q_0) \mid t \in U\} \text{ if } t_4, t_5 \notin U, \tag{5}$$

$$\delta(q_0, U) = \{(t, q_1) | t \in U\} \; if \; t_4 \in U \; or \; t_5 \in U, \; and \quad (5')$$

$$\delta(q_1, U) = \{(t, q_1) | t \in U\}. \quad (5'')$$

Naravno, možemo da posmatramo gorenavedenu $Q = \{q_0\}$ i odgovarajuću δ, ali smo koristili dva stanja za automatizam kojim smo pokazali faze investicionog fonda: prikupljanje novca od investitora (tranzicije t_1, t_2 i t_3) I stimulaciju kontinuiteta fonda (tranzicije t_4 i t_5).

Gore navedene markere M_4 i M_6 dobili smo rešavanjem jednačina

$$M_4 - M_0 = (cf' - cf, a, 0, ps - pe, pe, 0, 0)^T = I_\Sigma \cdot f' \; and \quad (6)$$

$$M_6 - M_0 = (cf'' - cf, a, 1, ps - pe, 0, 0, pe)^T = I_\Sigma \cdot f'' \quad (6')$$

sa varijablama cf', f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 i , redom cf'', f''_1, f''_2, f''_3, f''_4 i f''_5.

Ako konačni marker s_1 odredimo kao Y a ukupnu investiranu sumu kao X dobijamo

$$Y = c + \left(3 \cdot \frac{b}{a} - 1\right) \cdot X, \quad (7)$$

gde $c = cf - 2 \cdot a + b$ a ako dodamo elemente kao u primedbi 2 koeficijent 3 od $\frac{b}{a}$ u (7) povećava se za 1 za svaki skup od dve pozicije i dve tranzicije.

Ako investicione fondove klasifikujemo primenom regresije 7 (videti [4]) one lažne će se naći u kategoriji sa visokim koeficijentima varijable koja služi za tumačenje X. Samo za jednu kategoriju ove tačke mogu da budu i poseban deo.

3. Primene

U C++ hederu "petri.h" definišemo dve kategorije: "tranz" and "marc". Kategorija "tranz" kao sadržaj ima tranzicije, i odlike celih brojeva "nrloc" (broj pozicija na Petrijevoj mreži), "indice" (indeks tranzicije), "pred" (vektor celih brojeva pondera prethodnika) i "succ" (vektor celog broja pondera sledbenika). Metodi su konstrukor kategorije i "citire". U konstruktoru svi ponderi počinju sa 0, a "citire" predstavlja prazni metod sa dve celine argumenata (broj pozicija i indeks tranzicije) koji čita stvarne pondere.

Kategorija "marc" sadrži markere kao objekte i cele veličine kao odlike "nrloc" (isto kao za "tranz"), "nrtrp" (broj tranzicija osposobljenih da okinu), "val" (vektor celog broja koji predstavlja tekući marker na Petrijevoj mreži), "cap" (vektor celog broja koji predstavlja kapacitete čvorova) i "ltrp" (vektor celog broja koji predstavlja listu tranzicija osposobljenih da okinu). Metodi su analogni onima iz kategorije "tranz": u konstruktoru, kapaciteti se pokreću pomoću –1 (I postoji obeležje beskonačnog kapaciteta) a markeri sa 0. Metod "init", koji sadrži ceo broj kao argument (broj pozicija) analogan je metodu "citire" kategorije "tranz": koristimo ga da pročitamo kapacitete i početni marker. Iz tog razloga smo ga nazvali "init" umesto "citire".

Takođe smo definisali dva operatora sa argument tranzicijom i poenterom koji se vraća *. Prvi je operator "*=" kojim se proverava da li je tranzicija osposobljena da okine na merkeru na kome se trenutno nalazi; ako jeste, povećaće "nrtrp" za 1, dodaće indeks tranzicije "ltrp" i obavestiće da je tranzicija osposobljena da okine. Drugi operator je "+=", sadrži argument da je tranzicija osposobljena da okine, zamenjuje tekući marker proizvedenim markerom (stanjem) i na ekranu ispisuje novo stanje.

Pošto u glavnom programu primenjujemo operator "*=" i koristimo indeks tranzicije od 1 do broja tranzicija i onda okida tranzicija sa najmanjim indeksom, Petrijeva mreža u našem modelu je u stvari Petrijeva mreža sa prioritetima: relacija reda ρ predstavlja ukupni odnos koji opada na indeksu tranzicije. Ovaj odnos reda nije suštinski značajan zato što, kad god postoje dve tranzicije osposobljene da okinu, konačni marker ne zavisi od redosleda ovih tranzicija. Primenom ovog odnosa Petrijevu mrežu sa prioritetima možemo da proširimo tranzicijama i lukovima (spojevima) od s_1, s_2 i s_3 tako da ispraznimo ove pozicije. Naravno, ove tranzicije imaju niže prioritete nego tranzicije t_1 to t_5 i njihovi prioriteti opadaju od tranzicije s_1 do tranzicije s_3. Pošto lokacije s_2 i s_3 imaju markere i potom, možemo da posmatramo samo jednu tranziciju da bismo ih ispraznili pomoću pondera koji su jednaki markerima. Kad uzmemo u obzir konačni marker s_1 možemo da posmatramo dve tranzicije: prva je sa ponderom luka $cf - 2 \cdot a + b$ a druga sa ponderom luka $3 \cdot b - a$ (uzimamo da je $a \mid pe$).

Da bismo definisali Petrijevu mrežu sa prioritetima ne moramo da se bavimo celim odnosom koji je gore prikazan: dovoljno je da posmatramo samo parcijalni odnos reda (poretka) između tranzicija koje mogu da budu paraleno osposobljene da okinu u datom trenutku. Stoga je parcijalni odnos takav da t_1 ima veći prioritet nego t_3 i t_4, a t_2 ima veći prioritet nego t_4. U našem C++ programu definišemo kategoriju "priortranz" kao proizašlu iz "tranz" I ona ima dodatne karakteristike "nrsucc", ceo broj tranzicija visokog prioriteta i "lsucc" listu ovih tranzicija. Takođe definišemo kategoriju proizvedenu iz "marc", naime "priormarc"

primenom istog mehanizma nasleđa. Konstruktor "priortranz" prvo poziva konstruktora-roditelja, a onda inicira listu sledbenika. Metod "citire" definiše se na sličan način. Operator "*=" za izvedene kategorije prvo koristi operatora-roditelja da proveri da li je tranzicija osposobljena da okine, a ako jeste, proverava da li ova tranzicija nema neku drugu tranzicju spremnu da okine, a koja je višeg prioriteta.

Kad govorimo o tome kako smo formirali listu tranzicija osposobljenih da okinu primenom operatora "*=" možemo takođe da kažemo da ova Petrijeva mreža predstavlja Petrijevu mrežu kontrolisanu redovima u režimu c_2 : prvi red je s_1 i u svakom trenutku red sadrži sve tranzicije osposobljene da okinu, i to samo te tranzicije.

Primer 2. *Posmatrajmo Petrijevu mrežu iz prethodnog poglavlja:*

1) $\mathrm{cf} = 100$, $\mathrm{ps} = 99$, $\mathrm{a} = 3$ i $\mathrm{b} = 11$.

2) $\mathrm{cf} = 400$, $\mathrm{ps} = 1500$, $\mathrm{a} = 7$ i $\mathrm{b} = 30$.

Rešenje:

1) Imamo a | ps, a odatle dobijamo pe = ps = 99 i konačan marker $(1095,3,1,0,\ 0,0,99)^T$
2) U ovom slučaju nemamo a | ps: $1500 = 214 * 7 + 2$. Dobijamo $\mathrm{pe} = 214 * 7 = 1498$ a konačni marker je $(18178,7,1,2,0,0,1498)^T$.

Svi gore navedeni konačni markeri su oblika M_6 i verifikuju (7).

Primer 3. *Posmatrajmo 21 postojeći investicioni fond (Rapoarte lunare ale Asociatiei Administratorilor de Fonduri în* 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009*, [15]). Pošto ne raspolažemo podacima o ukupno investiranoj sumi, posmatrajmo kao varijablu broj investitora (hipoteza je da je gore navedena suma proporcionalna ovom broju). Rezultujuća varijabla je red "VAN" na tabeli u Excel-u, izražena milionima leja. Rezultati su prikazani na sledećoj tabeli.*

Tabela 1: *21 investicioni forn u aprilu 2000. godine*

Found	*Active Clasic*	*Active Dinamic*	*Active Junior*	*ALPHA*	*ARDAF*	*Armonia*
X	521	938	481	453	4532	874
Y	769	2388	839	300191	2796	1193
Found	*Capital Plus*	*FCEx*	*FDI Galați*	*FIDE*	*FIG*	*FNA*
X	8900	2011	229	560	14548	18306
Y	16112	39082	17820	11436	251426	121019
Found	*FNI*	*FON*	*Fortuna Classic*	*Fortuna Gold*	*FVG*	*Stabilo*
X	301331	92	22359	88	2587	651
Y	3412516	59160	37329	7291	3340467	23378
Found	*Tezaur*	*FMT*	*UNOPC*			
X	94	556	379322			
Y	5077	46656	4394222			

Primenićemo C++ program za klasifikovanje i primenićemo polinomsku regresiju od Ciuiu, 2007. Stepen polynomske je 1 (linije regresije). Ako posmatramo dve kategorije (klase), dobijamo prvu kategoriju $\mathrm{Y} = 185505.77381 + 10.89722\mathrm{X}$ i drugu kategoriju $Y = 5143278.71429 - 10691.14286X$, u kojoj se nalaze investicioni fondovi Active Junior and ALPHA. Ostali investicioni fondovi nalaze se u prvoj kategoriji.

Ako posmatramo tri kategorije, dobićemo prvu kategoriju $\mathrm{Y} = -8665.80285 + 1324.75936\mathrm{X}$ sa investicionim fondovima FON, Fortuna Gold i FVG, drugu kategoriju $Y = 5143278.71429 - 10691.14286X$ sa investicionim fondovima Active Junior i ALPHA, i treću kategoriju $Y = -19712.58989 + 11.52103X$ u kojoj su ostali investicioni fondovi.

Zapažamo da, ako povećamobroj kategorija od 3 do 10, preostaje jedna kategorija u kojoj su samo investicioni fondovi Active Junior and ALPHA. koeficijent X za liniju regresije koja odgovara kategoriji u kojoj se nalazi FNI je 11.74369 za 4 kategorije, 11.7062 za 5 kategorija, 12.58743 za 6 kategorija, 11.28776 za 7 ili 8 kategorija, odnosno 11.34757 za 9 ili 10 kategorija.

4. Zaključci

Za vreme krize, usled akutnog nedostatka roba, nastaju mnoge organizacije kao ovi lažni investicioni fondovi. One obećavaju zarade koje nisu održive čak ni u periodima ekonomskog buma. U ovom radu predstavili smo jednostavni model Petrijeve mreže ovakvog investicionog fonda. Ovaj model je moguće

proširiti tranzicijom koja modeluje plaćanje poreza državnom budžetu i poziciju za to, pa da izgleda da fond pošteno radi. Naravno, mogući model Petrijeve mreže za pošten investicioni fond mora da bude stohastičan (videti [11,14]) da bi se napravio model rizika fonda: ne može se računati na siguran dobitak.

Modeli koji koriste klasične Petrijeve mreže pozicija-tranzicija i njihove proširene oblike koriste se u popisivanju proizvoda u fabrici za prodaju preko određenog broja maloprodajnih objekata (videti [11]) ili sirovina za štampariju (videti [3]), za modelovanje i procenu performansi podele hardvera/softvera (videti [8]), ili u modelima proizvodnje: modelovanje i procena proizvodnih sistema (videti [14]), modelovanje i procena njihovih softvera (videti [5]) ili u kontroli zakočenih fleksibilnih proizvodnih sistema (videti [13]). Ekonomski plan za proizvodnju, nabavku, kontrolu kvaliteta i prodaju u fabrici lekova modelovan je u [9] obojenom, stohastičkom, pravovremenom i hijerarhijskom Petrijevom mrežom. U ovom radu takođe predstavljamo ekonomski model: markeri na pozicijama Petrijeve mreže predstavljaju sume novca.

U ovom radu koristili smo dve regresije koje koriste elemente Petrijeve mreže kao rezultujuće varijable i varijable za tumačenje (nelinearne, a ne linearne kao u ovom radu) u [11] da bismo optimizovali performanse sistema koji smo modelovali. Primenom Petrijeve mreže prvo se definiše distribucija verovatnoće za okidanje tri tranzicije u sukobu (koriste iste resurse): p_1 za prvu, p_2 za drugu $1 - p_1 - p_2$ za poslednju. Zatim se posmatraju p_1 i p_2 kao varijable pomoću kojih se tumači (u stvari, zbog linearnosti, stvarne varijable za tumačenje predstavljaju nelinearne funkcije p_1 i p_2), i rezultujuća varijabla C – ukupni trošak inventara/zaliha. Primenom jedne od dobijenih regresija $C = f(p_1, p_2)$ dobijamo optimalni trošak za oba slučaja za minimalnu tačku f.

Operatori "*=" i "+=" definisani su u hederu "petri.h" imajući u vidu da multiplikacija ima viši prioritet nego suma: u svakoj Petrijevoj mreži (običnoj ili proširenoj) prvo moramo da proverimo da li je tranzicija osposobljena da okine na datom markeru i jedino ako je zaista osposobljena, ona okida i dobijamo novi marker.

Sve odlike i metodi iz kategorija "tranz" i "marc" su javni i može im se slobodno pristupiti (uključujući i glavni program u kome očitavamo neke odlike kao što je "nrloc" za markere i tranzicije i pišemo neke druge kao što je "indice" za tranzicije osposobljene da okinu. Otvoreni problem ostaje kako proveriti koja odlika i koji metod mora da ostane javni, a koji može da bude privatni ili makar zaštićen.

U [3] se koriste softverske alatke CPN a u [5] koriste se softveri "PED" i "FUNlite Petri net simulator" za Petrijeve mreže. Ali naš heder nam omogućava da sačinimo kategorije za proširenja Petrijevih mreža u vidu obojenih Petrijevih mreža (videti [3,9,14]), stohastičkih Petrijevih mreža (videti [11,9,14]) ili pravovremenih Petrijevih mreža (videti [8]) primenom mehanizama nasleđa. U mehanizmima nasleđa za Petrijeve mreže sa prioritetima, kategorije roditelja obeležene su u hederu "petri.h" virtual za primenu višestrukog nasleđa. U stvari, u praksi korišćene Petrijeve mreže nisu samo jednostavna proširenja Petrijevih mreža: na primer, možemo koristiti temporalnu Petrijevu mrežu sa prioritetima.

Ostaje otvoreni problem primene Petrijevih mreža ili njihovih proširenja u drugim ekonomskim modelima. Na primer, možemo da proverimo da li je veza između S – nepromenljivih i ekvilibrijuma jednačina. Drugi problem koji ostaje otvoren u ovom radu jeste primena nekih drugih proširenja Petrijevih mreža za modelovanja lažnih investicionih fondova ili drugih prevara, na primer piramidalnih igara. Prvo možemo da primenimo stohastične Petrijeve mreže (sa simulacijom slučajnih elemenata) da modelujemo slučajne elemente sistema, a hijerarhijske Petrijeve mreže da modelujemo strukturu sistema. Primenom pravovremenih Petrijevih mreža možemo ovaj model da uvedemo u vremenske intervale operacija u modelovanom sistemu.

U slučaju obojenih Petrijevih mreža (videti [3,9,14]) prvi korak jeste da se izgradi model $AS - IS$, naredni je da se procene njegove performase, da se pokuša sa nekim izmenjenim scenarijima (videti [9]) da bi se poboljšale performanse sistema i da se konačno izgradi model $TO - BE$. Interesantno pitanje je da li možemo da idemo unazad: od modela $TO - BE$ do modela $AS - IS$. Moguće je da možemo da koristimo obojene Petrijeve mreže za druge modele prevara i čak za neformalnu ekonomiju (videti [2]): model $TO - BE$ biće lažni model a model $AS - IS$ će biti pravi model.

BIBLIOGRAPHY

[1] Acostâchioaie, D., *Programare C şi C++ pentru Linux*, Ed. Polirom, Iaşi, 2002.

[2] Albu, L. L., "A Model to Estimate Spatial Distribution of Informal Economy", *Romanian Journal of Economic Forecasting*, Vol. 9, No. 4 (2008) 111-124.

[3] Andrić, B., Makajić-Nicolić, D., Stefanović, B. and Vujošević, M., "Modeling inventory control process using colored Petri nets", *Proceedings of the 7-th Balkan Conference on Operational Research*, Constanta, Romania (May 25-28 2005) 3-10.

[4] Ciuiu, D., "Pattern Classification using Polynomial and Linear Regression", *Proceedings of the International Conference Trends and Challenges in Applied Mathematics*, Technical University of Civil Engineering, Bucharest, Romania (June 20-23 2007) 153-156.

[5] Heiner, M., Deussen, P. and Spranger, J., "A Case Study n Design and Verification of Manufacturing System Control Software with Hierarchical Petri Nets", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technologies*, Vol. 15, No. 2 (1999) 139-152.

[6] Jucan,T., and Ţiplea, F.L., *Reţele Petri. Teorie şi practicâ*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1999.

[7] Jula, D., *Introducere în Econometrie*, Ed. Professional Consulting, Bucureşti, 2003.

[8] Maciel, P., Barros, E. and Rosenstiel, W., "A Petri Net Model for Hardware/Software Codesign", *Design Automation for Embedded Systems*, Vol. 4, No. 4 (1999) 243-310.

[9] Makajić-Nicolić, D. and Vujošević, M., "An Application of Colored Petri Nets to Business Reengineering", *Proceedings of the 6-th Balkan Conference on Operational Research*, Thessaloniki, Greece (May 22-25 2002) 263-272.

[10] Saporta, G., *Probabilités, Analyse des Donées et Statistique*, Editions Technip, Paris, 1990.

[11] Srinivasa Raghavan, N.R. and Roy, D., "A Stochastic Petri Net Approach for Inventory Rationing in Multi—Echelon Supply Chains", *Journal of Heuristics*, Vol 11, No. 5-6 (2005) 421-446.

[12] Voineagu, V. et all, *Teorie şi practic? econometric?*, Meteor Press, Bucureşti, 2007.

[13] Zhiwu Li and Na Wei, "Deadlock Control of Flexible Manufacturing Systems via Invariant-Controlled Elementary Siphons of Petri Nets", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technologies*, Vol. 33, No. 1-2 (2007) 24-35.

[14] Zimmermann, A. and Hommel, G., "Modeling and Evaluation of Manufacturing Systems using Dedicated Petri Nets", *The International Journal of Advanced Manufacturing Technologies*, Vol. 15, No. 2 (1999) 132-138.

[15] Rapoarte lunare ale Asociatiei Administratorilor de Fonduri în 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009,, www.kmarket.ro/fonduri/fonduri.php.